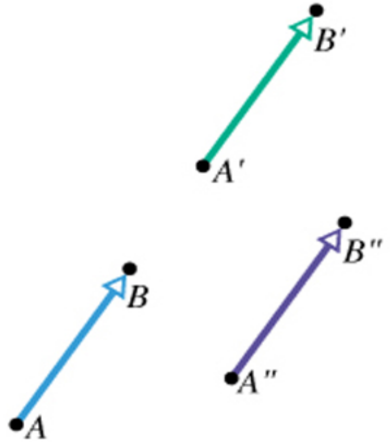
Terza Lezione

1) Vettori e scalari – Metodo grafico per la somma di vettori
2) I vettori e le loro componenti
3) Vettori unitari (versori) e somma di vettori attraverso le componenti
4) I vettori e le leggi della fisica
5) Prodotti di vettori:
   A) Prodotto per uno scalare
   B) Prodotto scalare
   C) Prodotto vettoriale

Riepilogo e sommario

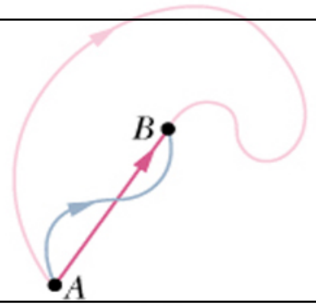
Vettori e scalari – Metodo grafico per la somma di vettori

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$



(a)

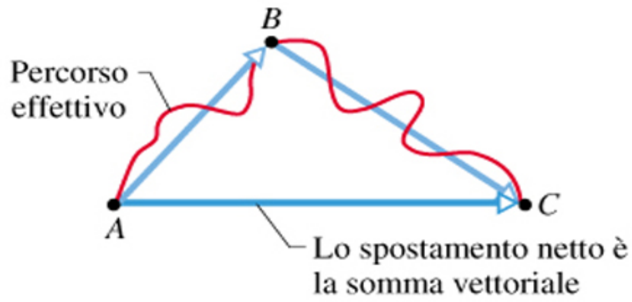
Frecce diverse – stesso spostamento



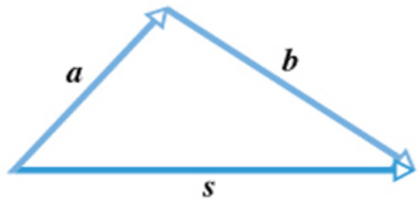
(b)

Percorsi diversi – stesso spostamento

Metodo grafico per la somma



(a)

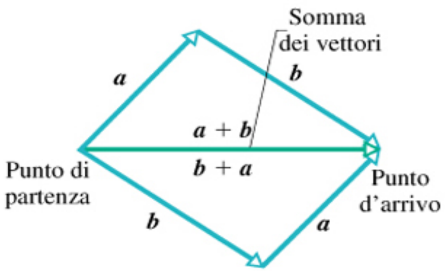


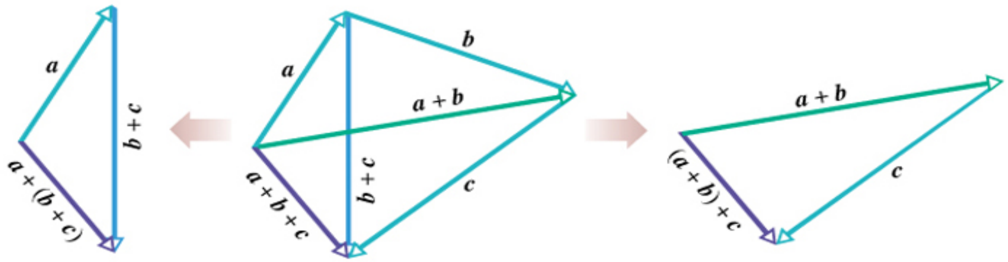
(b)

Proprietà della somma di vettori – differenza di vettori

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$
$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$$

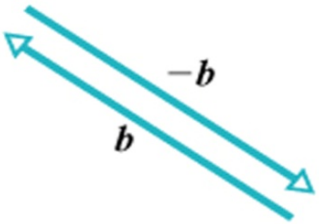
Proprietà commutativa e associativa

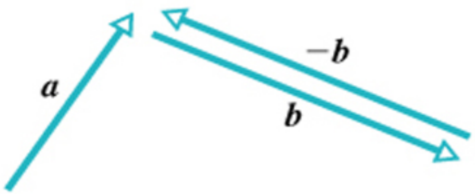




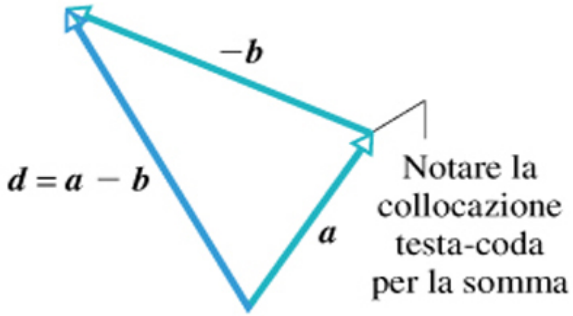
$$\vec{b} + \left(-\vec{b}\right) = \vec{0}$$
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + \left(-\vec{b}\right)$$

Vettori opposti e differenza di vettori





(a)



(b)

VERIFICA 1: I moduli di due spostamenti $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono rispettivamente 3 m e 4 m. La loro somma è $\vec{c}$. Si considerino vari orientamenti di $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e si determini (a) il massimo valore possibile per il modulo della somma e (b) il suo minimo valore possibile

Problema svolto 3.1

In una esercitazione di orientamento vi viene affidato il compito di allontanarvi il più possibile (valutando la distanza raggiunta in linea retta) dal campo base, percorrendo tre tratte rettilinee specificate ma in un ordine di vostra scelta: (a) $\boldsymbol{a}$, 2.0 km verso est; (b) $\boldsymbol{b}$, 2.0 km in direzione di 30° verso est rispetto al nord; (c) $\boldsymbol{c}$, 1.0 km verso ovest. Potete anche scegliere di sostituire $\boldsymbol{b}$ con $-\boldsymbol{b}$ oppure $\boldsymbol{c}$ con $-\boldsymbol{c}$. Qual è il punto più lontano dal campo base che potete raggiungere al termine della terza tratta?

SOLUZIONE Usando una scala adeguata, disegniamo i vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $-\boldsymbol{b}$ e $-\boldsymbol{c}$ nella figura 3.7a. Trasliamo poi mentalmente i vettori sulla pagina, collegandone tre di loro testa-coda per trovare il vettore somma $\boldsymbol{d}$. La coda del primo rappresenta il campo base e la punta del terzo rappresenta il luogo raggiunto. Il vettore $\boldsymbol{d}$ si estende tra questi due estremi. Il suo modulo d è la distanza dal campo base.

Si trova che questa distanza è massima per la composizione a testa-coda dei vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $-\boldsymbol{c}$. L'ordine in cui li si dispone non ha importanza perché la loro somma non cambia. L'ordine mostrato nella figura 3.7b è per il vettore somma

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{c}).$$

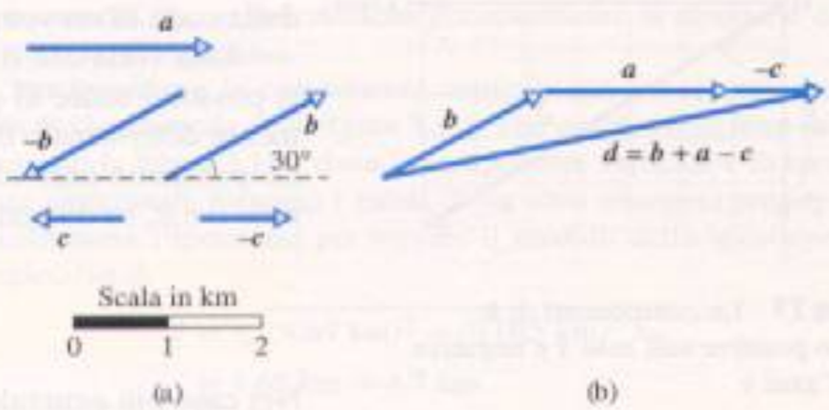
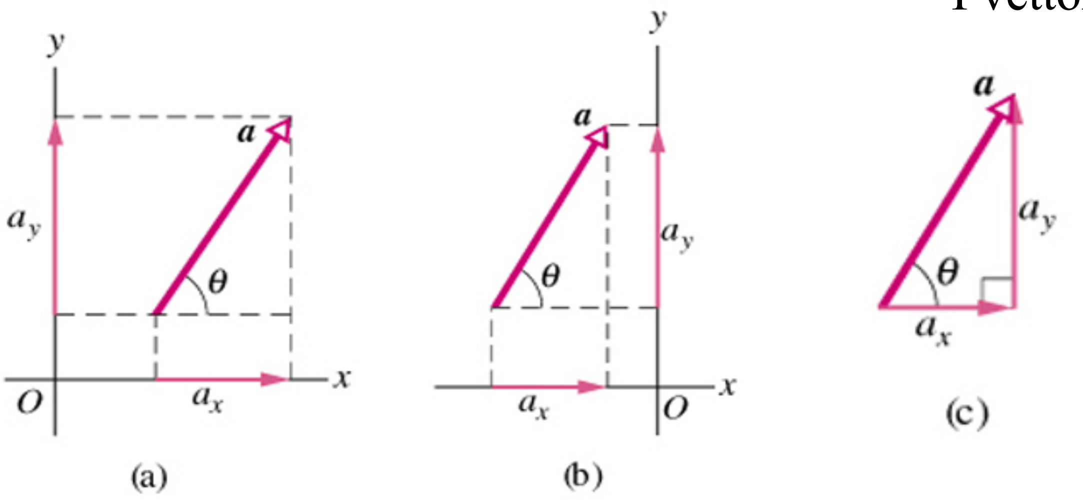


Figura 3.7 Problema svolto 3.1. (a) Vettori spostamento; bisogna sceglierne tre. (b) La distanza dal campo base è massima se combiniamo gli spostamenti $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $-\boldsymbol{c}$, e senza badare al loro ordine. Ne viene mostrato un possibile ordine, il cui vettore somma è $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$.

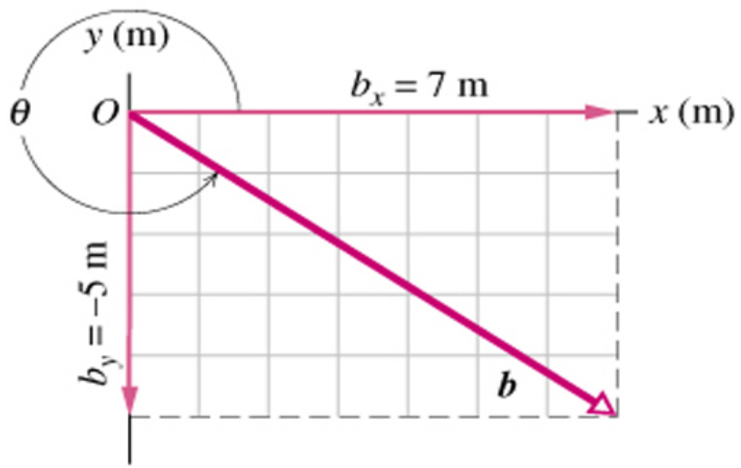
Servendoci della scala indicata nella figura 3.7a misuriamo la lunghezza del vettore somma d, trovando

$$d = 4.8 \text{ m}.$$

I vettori e le loro componenti



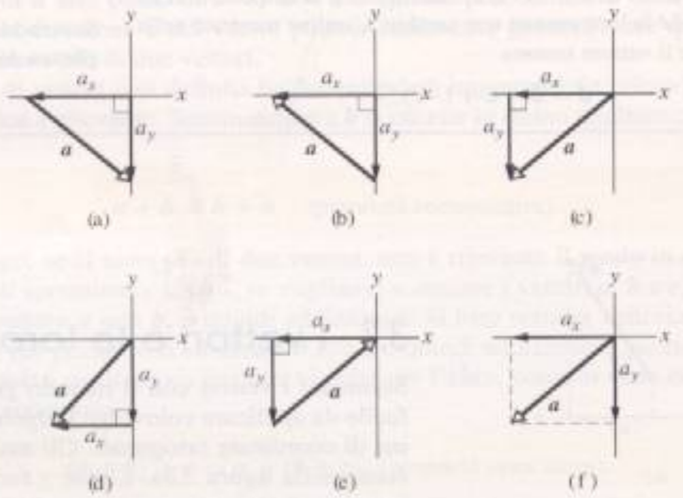
$$
\begin{aligned}
a_x &= a\cos\theta \\
a_y &= a\,sen\,\theta
\end{aligned}
\Rightarrow
\begin{aligned}
a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\
\tan\theta &= \frac{a_y}{a_x}
\end{aligned}
$$



Componenti positive e … negative

Verifica 2 – Problema svolto 3.2

VERIFICA 2: Nella figura che segue, quali dei metodi indicati per combinare le componenti x e y del vettore $\boldsymbol{a}$ sono appropriati per individuare questo vettore?



Problema svolto 3.2

Un piccolo aeroplano decolla da un aeroporto in una giornata nuvolosa e viene avvistato più tardi a 215 km, in una direzione che forma un angolo di 22° verso est rispetto al nord. A che distanze verso nord e verso est si trova l'aereo quando viene avvistato?

SOLUZIONE: È idea chiave osservare che ci vengono dati un modulo (215 km) e un angolo (22° a est rispetto a nord), dopodiché ci vengono richieste le componenti del vettore. In un sistema di coordinate xy la situazione è come si vede nella figura 3.10, dove, per comodità, l'origine è posta all'aeroporto, l'asse x è diretto verso est e l'asse y verso nord. Il vettore spostamento $\boldsymbol{d}$ dell'aereo congiunge l'origine col punto in cui è stato avvistato l'aereo.

Per trovare le componenti di $\boldsymbol{d}$ ricorriamo alle equazioni 3.5, ponendo $\theta = 68° (= 90° - 22°)$ ottenendo

$$d_x = d \cos\theta = (215 \text{ km})(\cos 68°) = 81 \text{ km}$$

e

$$d_y = d \sin\theta = (215 \text{ km})(\sin 68°) = 199 \text{ km}.$$

Quindi l'aereo fu localizzato a 199 km verso nord e 81 km verso est rispetto all'aeroporto.

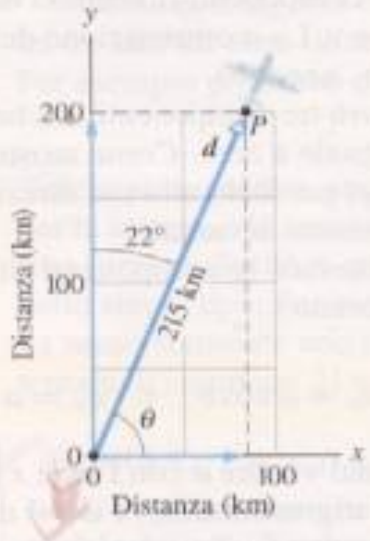


Figura 3.10 Problema svolto 3.2. Un aereo decolla da un aeroporto nel punto di origine ed è avvistato più tardi nel punto P.

Problema svolto 3.3

La squadra che nel 1972 trovò la connessione nel sistema di grotte Mammut–Flint percorse, dall'ingresso di Austin del Sistema Flint–Ridge all'Echo River della Caverna del Mammut (vedi la fig. 3.11a), una distanza netta di 2.6 km. verso ovest, 3.9 km. verso sud e 25 m. verso l'alto. Quale fu il suo vettore spostamento complessivo?

SOLUZIONE: Ora invece la idea chiave sta nel riconoscere che abbiamo le componenti di un vettore tridimensionale e dobbiamo trovare il modulo e i due angoli che ne definiscono la direzione. Per prima cosa tracciamo le componenti come in figura 3.11b. Le componenti orizzontali (2.6 km est e 3.9 km sud) costituiscono i cateti di un triangolo rettangolo posto sul piano orizzontale. Lo spostamento orizzontale è rappresentato dall'ipotenusa del triangolo, d_{or}. Il modulo di d_{or} è dato dal teorema di Pitagora:

$$d_{or} = \sqrt{(2.6\ \text{km})^2 + (3.9\ \text{km})^2} = 4.69\ \text{km}\,.$$

In questo triangolo orizzontale vediamo che lo spostamento orizzontale è diretto secondo un angolo θ_{or} rispetto alla direzione ovest dato da

$$\tan\theta_{or} = \frac{3.9\ \text{km}}{2.6\ \text{km}}\,,$$

ossia

$$\theta_{or} = \arctan\frac{3.9\ \text{km}}{2.6\ \text{km}} = 56^\circ\,,$$

che è uno dei due angoli richiesti per specificare la direzione dello spostamento complessivo.

Per introdurre la componente verticale (25 m) assumiamo un punto di vista laterale della figura 3.11b, che guardi verso nord-ovest. Otteniamo la figura 3.11c, dove la componente verticale e lo spostamento orizzontale formano i cateti di un altro triangolo rettangolo. Calcoliamone l'ipotenusa per trovare il modulo dello spostamento complessivo d:

$$d = \sqrt{(4.69\ \text{km})^2 + (0.025\ \text{km})^2} = 4.69\ \text{km} \approx 4.7\ \text{km}\,.$$

Lo spostamento complessivo è inclinato verso l'alto rispetto al piano orizzontale di un angolo ϕ_v dato da

$$\phi_v = \arctan\frac{0.025\ \text{km}}{4.69\ \text{km}} = 0.3^\circ\,.$$

Quindi la squadra si è spostata di 4.7 km con un angolo di 56° verso sud rispetto a ovest, e con un angolo di 0.3° verso l'alto. Lo spostamento netto verticale era, naturalmente, insignificante, in confronto al movimento orizzontale, ma questa considerazione non avrebbe confortato la squadra, mentre si arrampicava su e giù innumerevoli volte. L'itinerario che essi percorsero effettivamente fu assai diverso dal vettore spostamento, che congiunge semplicemente il punto di partenza col punto di arrivo.

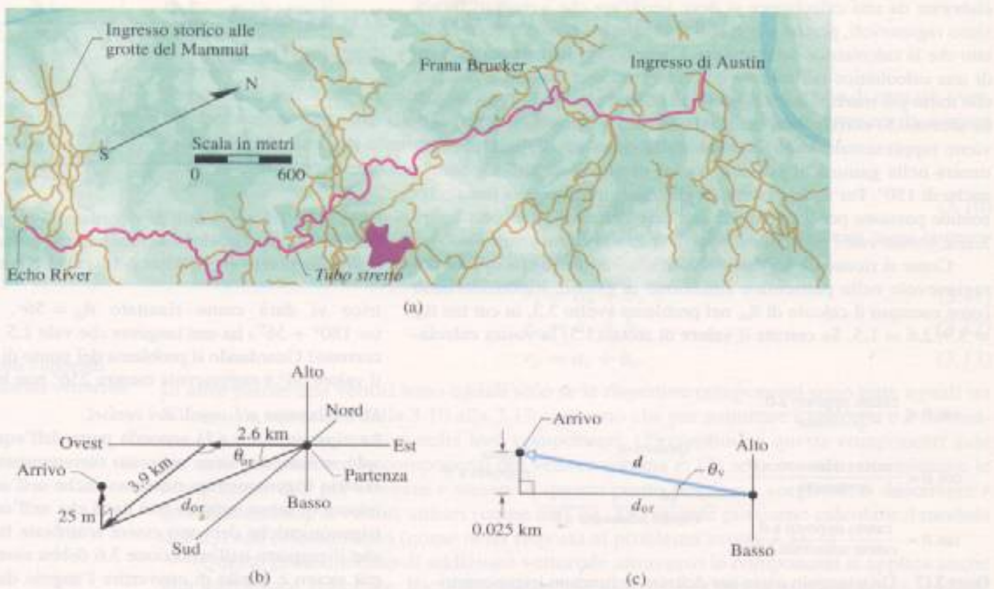


Figura 3.11 Problema svolto 3.3. (a) Parte del sistema di grotte Mammut–Flint, con indicato il percorso seguito dalla squadra di speleologi dall'ingresso di Austin all'Echo River (in rosso). (b) Le componenti dello spostamento complessivo della squadra e il suo spostamento orizzontale d_{or}. (c) Una vista laterale che illustra d_{or} e il vettore $\boldsymbol{d}$ corrispondente allo spostamento complessivo. (Adattato dalla mappa della Cave Research Foundation).

Accorgimenti per risolvere i problemi

A3-1. *Angoli: gradi e radianti.*
Gli angoli misurati rispetto all'asse x, a partire dalla semiretta positiva, sono positivi se vengono misurati in senso antiorario, e negativi se sono misurati in senso orario. Per esempio 210° e −150° sono angoli che individuano la stessa direzione.

Gli angoli si possono misurare in gradi o in radianti (rad)[2]. Si possono confrontare le due misure ricordando che un angolo giro equivale a 360° e a 2π rad. Così, se fosse necessario, per esempio, convertire 40° in radianti, si può scrivere:

$$40^\circ \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = 0.70 \text{ rad}.$$

A3-2. *Funzioni trigonometriche.*
È necessario conoscere le definizioni delle comuni funzioni trigonometriche – seno, coseno e tangente – perché esse sono parte del linguaggio della scienza e dell'ingegneria. Vi rammentiamo le definizioni nella figura 3.12 in una forma che non dipende dalla simbologia adottata per definire il triangolo.

Dovreste anche saper tracciare uno schizzo dell'andamento delle funzioni trigonometriche in funzione dell'angolo, come nella figura 3.13, per imparare a valutare se il risultato dato da una calcolatrice ha senso. Potrebbe anche essere utile sapere il segno delle funzioni nei diversi quadranti.

A3-3. *Funzioni trigonometriche inverse.*
Le più importanti funzioni trigonometriche inverse sono l'arcoseno, l'arcocoseno e l'arcotangente (arcsin, arccos e arctan). Se esse sono elaborate da una calcolatrice si deve verificare che i risultati forniti siano ragionevoli, perché c'è di solito almeno un altro possibile risultato che la calcolatrice non fornisce. L'estensione del campo d'azione di una calcolatrice nel trattare qualsiasi funzione inversa è indicata con tratto più marcato nella figura 3.13. Come esempio, all'espressione arcsin(0.5) corrisponde indifferentemente un angolo di 30° (come viene rappresentato sullo schermo dalla calcolatrice, dato che 30° rientra nella gamma di possibili valori di angoli di cui dispone) o anche di 150°. Per vedere entrambi gli angoli tracciate una linea orizzontale passante per il punto 0.5 dell'asse delle ordinate nella figura 3.13a, e osservate i punti in cui essa interseca la curva sinusoide.

Come si riconosce un risultato corretto? È quello che appare più ragionevole nella particolare situazione in esame. Riconsideriamo come esempio il calcolo di θ_{or} nel problema svolto 3.3, in cui $\tan \theta_{or} = 3.9/2.6 = 1.5$. Se cercate il valore di arctan(1.5) la vostra calcolatrice vi darà come risultato $\theta_{or} = 56^\circ$, ma anche $\theta_{or} = 236^\circ$ ($= 180^\circ + 56^\circ$) ha una tangente che vale 1.5. Quale dei due risultati è corretto? Guardando il problema del punto di vista fisico è chiaro che il valore 56° è ragionevole mentre 236° non lo è.

$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adiacente a } \theta}{\text{ipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opposto a } \theta}{\text{cateto adiacente a } \theta}$$

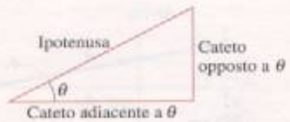


Figura 3.12 Un triangolo usato per definire le funzioni trigonometriche. (Vedi appendice E).

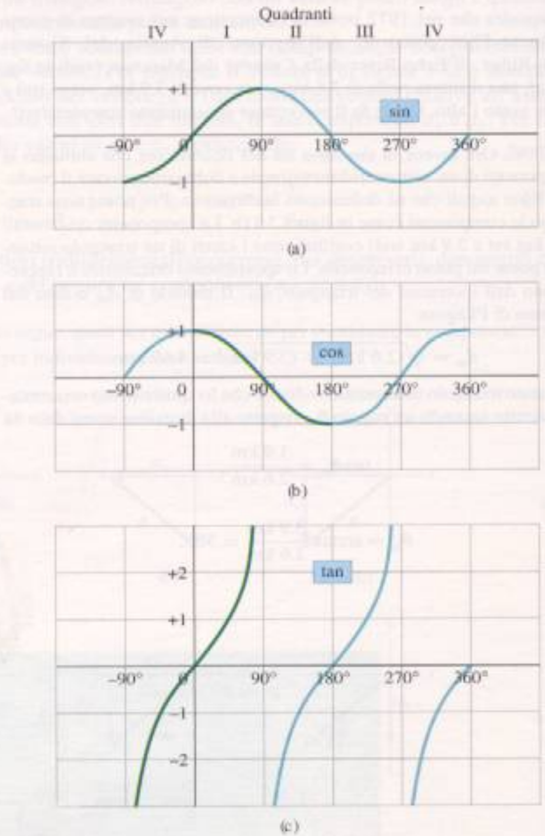


Figura 3.13 Tre curve utili da ricordare. Il campo di operazione della calcolatrice per elaborare le funzioni trigonometriche *inverse* è indicato dalla porzione più scura delle curve colorate.

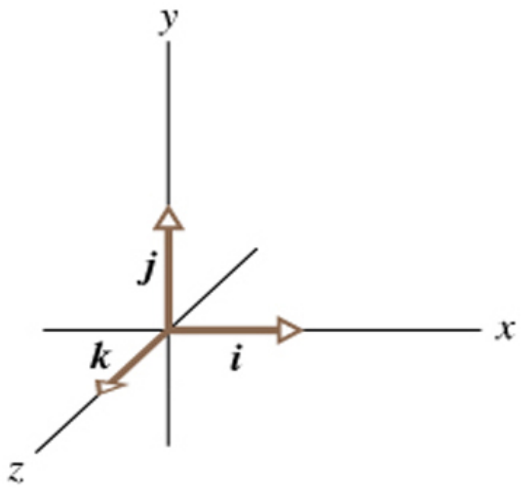
A3-4. *Misurare gli angoli dei vettori.*
Le equazioni 3.5 e la seconda parte dell'equazione 3.6 sono valide solo se l'angolo viene misurato correttamente rispetto all'asse x, col criterio trigonometrico riassunto anche nell'accorgimento A3.1. Se si misura in senso opposto può darsi che nell'equazione 3.5 le funzioni trigonometriche debbano essere scambiate fra loro, e può succedere che il rapporto nell'equazione 3.6 debba essere invertito. Un metodo più sicuro è quello di convertire l'angolo dato in un angolo che sia misurato a partire dal semiasse positivo delle x.

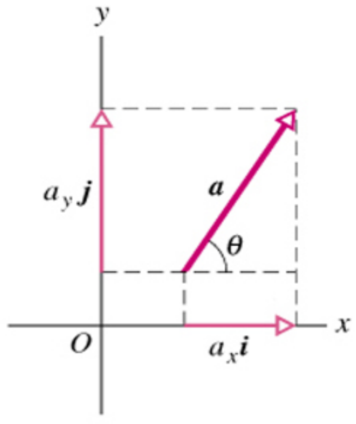
---

[2] Parlando di gradi come unità di misura degli angoli, in questo testo ci riferiamo sempre ai gradi *sessagesimali* (in inglese *degrees*, e sulle calcolatrici indicati con "deg"). Vanno distinti da altri tipi di gradi di uso più raro, quali: gradi centesimali (pari a 1/400 dell'angolo-giro, in inglese *grades* e sulle calcolatrici "grad"), e i gradi millesimali (1/6400 dell'angolo-giro). Un grado sessagesimale si suddivide di solito in 60 *primi* (') e ciascun primo in 60 *secondi* ("). Nulla impedisce però all'occorrenza di dividere il grado in normali frazioni decimali, notazione caratterizzata dalla presenza del punto decimale e quasi sempre usata nelle macchine da calcolo. Così ad esempio 2.75° equivale a 2° 45' e 13.505° = 13° 30' 18" [*N. d. T.*]

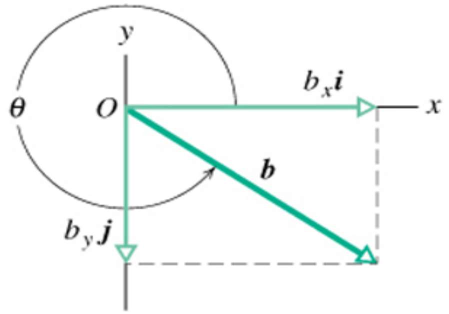
Vettori unitari (versori) e somma di vettori attraverso le componenti Verifica 3

Problema svolto 3.4 e 3.5





(a)

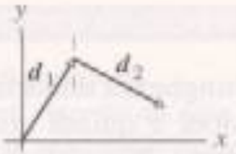


(b)

Componenti Vettoriali e Componenti Scalari o "semplicemente" Componenti

Proprietà dei versori

Verifica 3 – Problema svolto 3.4



VERIFICA 3: Nella figura a lato, (a) che segno hanno le componenti x di $\boldsymbol{d}_1$ e $\boldsymbol{d}_2$? (b) Che segno hanno le loro componenti y? (c) Che segno hanno le componenti x e y del vettore addizione $\boldsymbol{d}_1 + \boldsymbol{d}_2$?

Problema svolto 3.4

La figura 3.16a presenta tre vettori, ciascuno espresso nella notazione in vettori unitari:

$$\boldsymbol{a} = (4.2 \text{ m})\boldsymbol{i} - (1.5 \text{ m})\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{b} = (-1.6 \text{ m})\boldsymbol{i} + (2.9 \text{ m})\boldsymbol{j},$$

e

$$\boldsymbol{c} = (-3.7 \text{ m})\boldsymbol{j}.$$

Trovate il vettore $\boldsymbol{r}$ mostrato in figura, che rappresenta la somma di questi tre vettori.

SOLUZIONE: Idea chiave: possiamo sommare i tre vettori attraverso le loro componenti, asse per asse. Per l'asse x sommiamo le componenti x dei vettori $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ e ricaviamo la componente x del vettore $\boldsymbol{r}$:

$$r_x = a_x + b_x + c_x = 4.2 \text{ m} - 1.6 \text{ m} + 0 = 2.6 \text{ m}$$

Analogamente per l'asse y:

$$r_y = a_y + b_y + c_y = -1.5 \text{ m} + 2.9 \text{ m} - 3.7 \text{ m} = -2.3 \text{ m}.$$

La Idea chiave è poi combinare queste due componenti per ottenere $\boldsymbol{r}$ espresso coi versori:

$$\boldsymbol{r} = (2.6 \text{ m})\boldsymbol{i} - (2.3 \text{ m})\boldsymbol{j},$$

dove $(2.6 \text{ m})\boldsymbol{i}$ è la componente vettoriale di $\boldsymbol{r}$ lungo l'asse x, mentre $-(2.3 \text{ m})\boldsymbol{j}$ è la sua componente vettoriale lungo l'asse y. Nella figura 3.16b vediamo un modo di combinare questi due vettori per formare $\boldsymbol{r}$. (Sapete disegnare l'altro modo?)

Un'altra Idea chiave ci suggerisce di rispondere alla domanda fornendo il modulo di $\boldsymbol{r}$ e specificandone la direzione con un angolo. Dall'equazione 3.6 ricaviamo il modulo:

$$r = \sqrt{(2.6 \text{ m})^2 + (-2.3 \text{ m})^2} \approx 3.5 \text{ m};$$

e l'angolo (misurato dal semiasse positivo delle x):

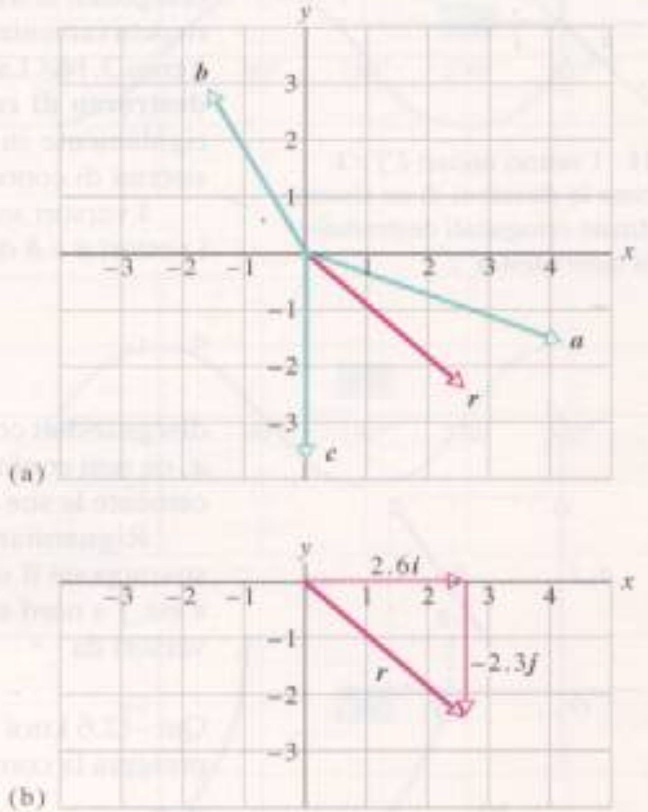


Figura 3.16 Problema svolto 3.4. Il vettore $\boldsymbol{r}$ è il vettore somma degli altri tre vettori.

$$\theta = \arctan\left(\frac{-2.3 \text{ m}}{2.6 \text{ m}}\right) = -41°,$$

dove il segno meno indica che i 41° vanno conteggiati in senso orario

Problema svolto 3.5

Ai concorrenti di un rally sono state fornite le seguenti istruzioni: dal punto di partenza (origine) usare le strade a disposizione per ottenere i seguenti spostamenti:
(1) $\boldsymbol{a}$, per raggiungere il punto di controllo Ada situato 36 km a est, quindi
(2) $\boldsymbol{b}$, per raggiungere il punto Bice posto 42 km a nord di Ada, e infine
(3) $\boldsymbol{c}$, 25 km a NW di Bice, il punto Carla.
Lo spostamento complessivo $\boldsymbol{d}$ ha modulo di 62.0 km. Qual è il modulo di $\boldsymbol{b}$?

SOLUZIONE: Qui la idea chiave è intendere il vettore $\boldsymbol{d}$ come somma dei tre singoli spostamenti:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c},$$

da cui

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}. \qquad (3.14)$$

Conosciamo sia il modulo sia la direzione di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{c}$, ma non entrambi gli elementi di $\boldsymbol{d}$, sicché non possiamo trovare direttamente $\boldsymbol{b}$ con una calcolatrice capace di trattare i vettori. Possiamo tuttavia scrivere l'equazione 3.14 in termini di componenti lungo entrambi gli assi. Dato che $\boldsymbol{b}$ è diretto come l'asse y, l'equazione relativa a questo solo asse ci dà la soluzione:

$$b_y = d_y - a_y - c_y. \qquad (3.15)$$

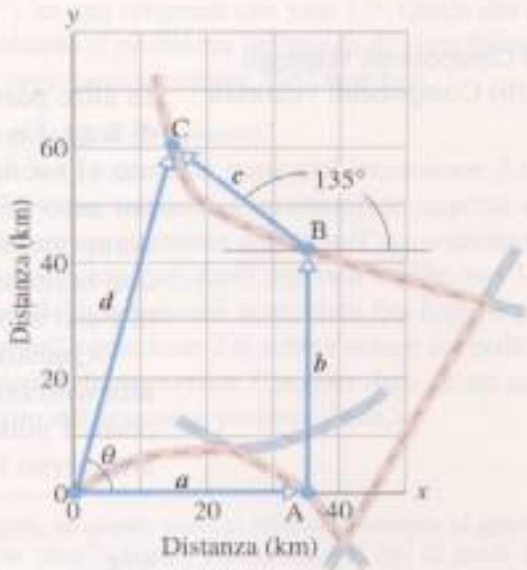


Figura 3.17 Problema svolto 3.5. Un percorso di rally, in cui si mostra il punto di partenza, i punti di controllo Ada (A), Bice (B) e Carla (C), e la rete stradale.

Per mezzo dunque dell'equazione 3.5, introducendo i dati e stabilito che $b = b_y$, si ha

$$b = (62\text{ km})\sin\theta - 0 - (25\text{ km})\sin 135°. \qquad (3.16)$$

Sfortunatamente non ci è noto l'angolo θ. Per ricavarlo scriviamo l'equazione 3.14 per le componenti x:

$$b_x = d_x - a_x - c_x, \qquad (3.17)$$

da cui si ottiene

$$0 = (62\text{ km})\cos\theta - 36\text{ km} - (25\text{ km})\cos 135°$$

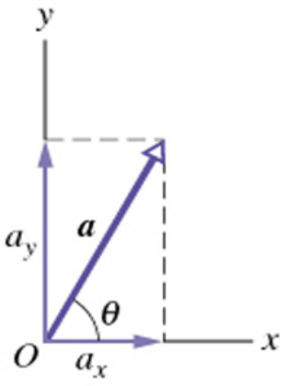
e

$$\theta = \arccos\frac{36 + (25)(\cos 135°)}{62} = 72.81°.$$

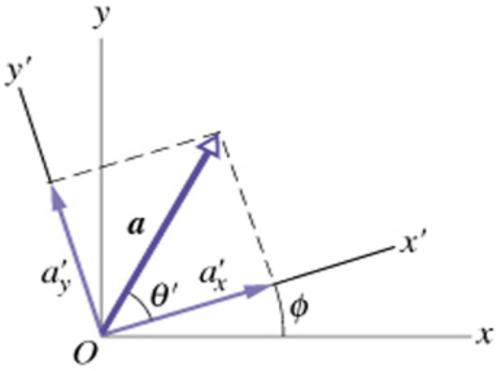
Inserendo il dato nella (3.16) abbiamo infine

$$b \approx 42\text{ km}.$$

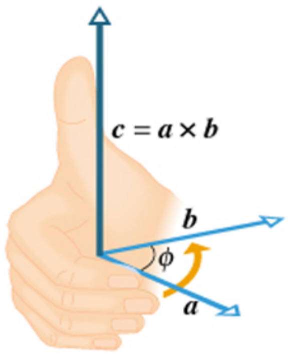
I vettori e le leggi della fisica - Prodotti di vettori



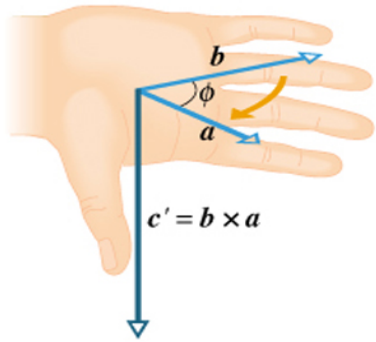
(a)



(b)



(a)



(b)

Regola della mano destra

Definizione e proprietà del prodotto per uno scalare, prodotto scalare e prodotto vettoriale ….

Verifica 4 - Problema svolto 3.6

VERIFICA 4: I vettori $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ hanno moduli pari rispettivamente a 3 unità e 4 unità. Che angolo formano questi due vettori se $\boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{D}$ è pari a (a) zero, (b) 12 unità, (c) −12 unità?

Problema svolto 3.6

Qual è l'angolo compreso tra $\boldsymbol{a} = 3.0\boldsymbol{i} - 4.0\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{b} = -2.0\boldsymbol{i} + 3.0\boldsymbol{k}$?

SOLUZIONE: Dapprima un avvertimento. Quantunque si possano evitare molti di questi passaggi grazie all'impiego di una calcolatrice capace di trattare i vettori, sarà didatticamente più efficace svolgere almeno qui tutti i passaggi.

La idea chiave consiste ora nel riconoscere che l'angolo compreso tra le direzioni di due vettori è insito nella definizione di prodotto scalare (eq. 3.20):

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab\cos\phi. \tag{3.24}$$

In questa equazione a rappresenta il modulo di $\boldsymbol{a}$:

$$a = \sqrt{3.0^2 + (-4.0)^2} = 5.00, \tag{3.25}$$

e b è il modulo di $\boldsymbol{b}$:

$$b = \sqrt{(-2.0)^2 + 3.0^2} = 3.61. \tag{3.26}$$

Seguiamo una idea chiave: valutiamo separatamente il membro sinistro della (3.24) scrivendo i vettori in notazione di versori e usando la proprietà distributiva:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (3.0\boldsymbol{i} - 4.0\boldsymbol{j}) \cdot (-2.0\boldsymbol{i} + 3.0\boldsymbol{k}) = \\ &= (3.0\boldsymbol{i}) \cdot (-2.0\boldsymbol{i}) + (3.0\boldsymbol{i}) \cdot (3.0\boldsymbol{k}) + \\ &+ (-4.0\boldsymbol{j}) \cdot (-2.0\boldsymbol{i}) + (-4.0\boldsymbol{j}) \cdot (3.0\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

Applichiamo ora nuovamente l'equazione 3.20 a ciascun termine, tenendo presente che l'angolo per il primo termine è 0° e per gli altri tre termini è 90°:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -(6.0)(1) + (9.0)(0) + (8.0)(0) - (12)(0) = -6.0.$$

Introducendo questi risultati nell'equazione 3.24 troviamo:

$$-6.0 = (5.00)(3.61)\cos\phi,$$

da cui

$$\phi = \arccos\frac{-6.0}{(5.00)(3.61)} = 109° \approx 110°.$$

Verifica 5 - Problema svolto 3.7 e 3.8 - Accorgimenti per risolvere i problemi

VERIFICA 5: I vettori $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ hanno moduli di misura rispettivamente 3 unità e 4 unità. Che angolo essi formano se il modulo del loro prodotto vettoriale è pari ad (a) zero, o (b) 12 unità?

Problema svolto 3.7

Il vettore $\boldsymbol{a}$ giace nel piano xy della figura 3.21. Il suo valore assoluto è pari a 18 (unità arbitrarie) e la sua direzione forma un angolo di 250° rispetto all'asse x. Il vettore $\boldsymbol{b}$ ha valore assoluto 12 (stesse unità) ed è diretto lungo l'asse z con verso concorde a quello positivo dell'asse. Qual è il prodotto vettoriale $\boldsymbol{c}$ dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$?

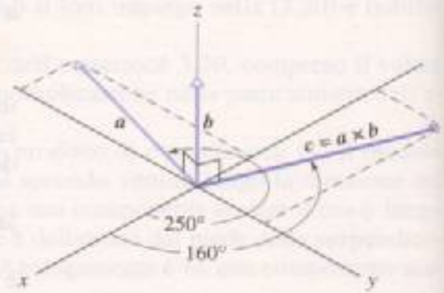


Figura 3.21 Problema svolto 3.7. Il vettore $\boldsymbol{c}$ (nel piano xy) è il prodotto vettoriale dei vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$.

SOLUZIONE: La prima idea chiave è che, avendo due vettori di cui conosciamo modulo e direzione, il modulo del prodotto vettoriale è dato dall'equazione 3.27. Il modulo c è dunque

$$c = ab\sin\phi = (18)(12)(\sin 90°) = 216.$$

La seconda idea chiave prevede che, conoscendo modulo e direzione di due vettori, si trovi il verso del loro prodotto vettoriale con la regola della mano destra. Ponendo l'indice lungo $\boldsymbol{a}$ e il medio lungo $\boldsymbol{b}$, la figura 3.21 mostra in che verso è diretto $\boldsymbol{c}$. Poiché $\boldsymbol{c}$ oltre a giacere nel piano xy è anche perpendicolare ad $\boldsymbol{a}$, la direzione di $\boldsymbol{c}$ forma un angolo di

$$250° - 90° = 160°$$

con il verso positivo dell'asse x.

Problema svolto 3.8

Se $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{b} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$, come si può esprimere $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$?

SOLUZIONE: Idea chiave è ricorrere alla proprietà distributiva per ottenere il prodotto vettoriale quando i due vettori sono dati in notazione coi versori. Qui possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c} &= (3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}) \times (-2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}) = \\ &= 3\boldsymbol{i} \times (-2\boldsymbol{i}) + 3\boldsymbol{i} \times 3\boldsymbol{k} + (-4\boldsymbol{j}) \times (-2\boldsymbol{i}) + (-4\boldsymbol{j}) \times 3\boldsymbol{k}).\end{aligned}$$

Valutiamo quindi ciascun termine in base all'equazione 3.27, determinando il verso con la regola della mano destra. Per il primo termine $\phi = 0°$, mentre per gli altri termini $\phi = 90°$. Troviamo

$$\boldsymbol{c} = 6(0) + 9(-\boldsymbol{j}) + 8(-\boldsymbol{k}) - 12\boldsymbol{i} = -12\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k}.$$

Il vettore $\boldsymbol{c}$ è perpendicolare sia al vettore $\boldsymbol{a}$ sia al vettore $\boldsymbol{b}$, fatto che si può controllare dimostrando che $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a} = 0$ e $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{b} = 0$; questo equivale a dire che la componente di $\boldsymbol{c}$ lungo la direzione di $\boldsymbol{a}$ o di $\boldsymbol{b}$ è nulla.

ACCORGIMENTI PER RISOLVERE I PROBLEMI

A3-5. *Errori comuni con il prodotto vettoriale.*
È facile fare molti errori nel calcolo del prodotto vettoriale. (1) Si può sbagliare a non collocare i vettori coda contro coda quando ci si lascia tentare da un'illustrazione che li presenta, ad esempio, punta contro coda: si deve mentalmente traslare (o, meglio, ridisegnare) uno di essi nella posizione giusta senza modificarne l'orientamento rispetto agli assi. (2) Sbagliare a usare la mano nell'applicazione della regola della mano destra è facile quando la stessa mano è occupata con una calcolatrice o una matita. (3) Può capitare di sbagliare nell'associare le dita ai vettori quando il loro orientamento richiede una torsione scomoda della mano per applicare la regola della mano destra. Certe volte capita di sbagliare quando si cerca di «manipolare» mentalmente dita e vettori piuttosto che usare effettivamente la mano. (4) Può succedere ancora di sbagliare quando si lavora con un sistema di coordinate ortogonali destrorso, se ci si dimentica in che modo debba essere tracciato questo sistema (vedi la figura 3.14).

Riepilogo e sommario/1 cap 3-5 ediz.

Scalari e vettori Gli *scalari*, come per esempio la temperatura, sono caratterizzati dalla loro misura, sono specificati da un numero e un'unità di misura (ad esempio 10 °C) e seguono le regole dell'aritmetica e dell'algebra comune. I *vettori*, di cui è un esempio lo spostamento, hanno, oltre al valore assoluto, anche una direzione e un verso (5 m verso nord) e seguono le speciali regole dell'algebra vettoriale.

Somma geometrica dei vettori Due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ si possono sommare geometricamente disegnandoli nella medesima scala e collocandoli uno di seguito all'altro, cioè ponendo la coda del secondo in corrispondenza della punta del primo. Il vettore che congiunge la coda di $\boldsymbol{a}$ alla punta di $\boldsymbol{b}$ è il vettore somma $\boldsymbol{s}$. Per sottrarre $\boldsymbol{b}$ da $\boldsymbol{a}$ si inverte la direzione di $\boldsymbol{b}$ per ottenere $-\boldsymbol{b}$; poi si somma $-\boldsymbol{b}$ ad $\boldsymbol{a}$. La somma e la sottrazione vettoriale sono commutative e rispondono alla proprietà associativa.

Componenti dei vettori Le componenti (scalari) a_x e a_y di un vettore $\boldsymbol{a}$ sono le proiezioni ortogonali di $\boldsymbol{a}$ sugli assi coordinati, che si ricavano tracciando rette perpendicolari dall'estremo di $\boldsymbol{a}$ agli assi coordinati. Le componenti sono date da

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a\sin\theta\,, \tag{3.5}$$

in cui θ viene misurato rispetto all'asse x secondo le regole del cerchio trigonometrico. Il segno algebrico delle componenti indica il loro verso lungo l'asse associato. Date le componenti, possiamo ricostruire il modulo e l'orientamento del vettore mediante

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}\,. \tag{3.6}$$

Versori Risulta spesso utile introdurre i vettori unitari, o *versori*, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ che hanno modulo 1 e le cui direzioni sono rispettivamente quelle degli assi x, y e z in un sistema di coordinate destrorso. Qualsiasi vettore $\boldsymbol{a}$ può essere espresso mediante i versori come

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}\,, \tag{3.7}$$

dove $a_x\boldsymbol{i}$, $a_y\boldsymbol{j}$ e $a_z\boldsymbol{k}$ sono le **componenti vettoriali** di $\boldsymbol{a}$ e a_x, a_y e a_z sono le **componenti scalari** di $\boldsymbol{a}$.

Somma di vettori con il metodo analitico Per sommare i vettori con il metodo analitico valgono le seguenti regole:

$$r_x = a_x + b_x;\ r_y = a_y + b_y;\ r_z = a_z + b_z. \qquad \text{(da 3.11 a 3.13)}$$

Qui $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono i vettori da sommare e $\boldsymbol{r}$ è il vettore somma.

I vettori e le leggi della fisica Ogni situazione fisica che implica l'uso di vettori si può descrivere usando molti possibili sistemi di coordinate. Di solito si sceglie quello che semplifica di più il nostro lavoro. Tuttavia i rapporti fra le grandezze vettoriali non dipendono dalla nostra scelta. Anche le leggi della fisica sono indipendenti dalla scelta del sistema di coordinate.

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare Il prodotto di uno scalare s e di un vettore $\boldsymbol{v}$ è un nuovo vettore il cui modulo è sv e la cui direzione è la stessa di $\boldsymbol{v}$ con verso identico se s è positivo e verso opposto a $\boldsymbol{v}$ se s è negativo. Per dividere $\boldsymbol{v}$ per s si moltiplica $\boldsymbol{v}$ per $1/s$.

Prodotto scalare Il prodotto scalare di due vettori si scrive $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ed è la quantità scalare data da

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\phi\,, \tag{3.20}$$

dove ϕ è l'angolo compreso fra la direzione di $\boldsymbol{a}$ e quella di $\boldsymbol{b}$. Il prodotto scalare può essere un numero positivo, nullo o negativo, a seconda del valore di ϕ. Il prodotto scalare è il prodotto del modulo di un vettore $\boldsymbol{a}$ per la componente del secondo vettore ($b\cos\phi$) nella direzione del primo vettore $\boldsymbol{a}$. Nella notazione con i versori abbiamo

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\cdot(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k})\,, \tag{3.22}$$

che obbedisce alla proprietà distributiva. Notiamo che $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

Prodotto vettoriale Il prodotto vettoriale di due vettori si scrive $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ed è un vettore $\boldsymbol{c}$ il cui modulo c è dato da

$$c = ab\sin\phi\,, \tag{3.27}$$

in cui ϕ è il minore dei due angoli compresi fra le direzioni di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. La direzione di $\boldsymbol{c}$ è ortogonale al piano definito da $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e il suo *verso positivo* si determina applicando la regola della mano destra descritta nella figura 3.20. Notiamo che $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$. Nella notazione con i versori abbiamo

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k})\,, \tag{3.29}$$

in cui si applica la proprietà distributiva.

Quesiti e Problemi/1 cap 3-5 ediz.

QUESITI

1. Il vettore spostamento $\mathbf{D}$ si estende dal punto di coordinate (5 m, 3 m) al punto di coordinate (7 m, 6 m) nel piano xy. Quali dei seguenti vettori spostamento sono equivalenti a $\mathbf{D}$: vettore $\mathbf{A}$, che si estende da (–6 m, –5 m) a (–4 m, –2 m); vettore $\mathbf{B}$, che si estende da (–6 m, 1 m) a (–4 m, 4 m); vettore $\mathbf{C}$, che si estende da (–8 m, –6 m) a (–10 m, –9 m)?

2. Può il modulo della differenza fra due vettori essere maggiore (a) del modulo di uno dei due vettori, (b) dei moduli di entrambi i vettori e (c) del modulo della loro somma?

3. L'equazione 3.2 dimostra che l'addizione di due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ è commutativa. Ciò significa che la sottrazione è commutativa, cioè che $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$?

4. Se $\mathbf{d}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+(-\mathbf{c})$, quali delle seguenti relazioni valgono: (a) $\mathbf{a}+(-\mathbf{d})=\mathbf{c}+(-\mathbf{b})$, (b) $\mathbf{a}=(-\mathbf{b})+\mathbf{d}+\mathbf{c}$, (c) $\mathbf{c}+(-\mathbf{d})=\mathbf{a}+\mathbf{b}$?

5. Descrivere due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ tali che:

(e) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$ e $a+b=c$;
(f) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$;
(g) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$ e $a^2+b^2=c^2$.

6. Con riferimento alla figura 3.22, sono positive o negative (a) la componente x e (b) la componente y del vettore $\mathbf{A}$? Sono positive o negative (c) la componente x e (d) la componente y del vettore $\mathbf{A}-\mathbf{B}$?

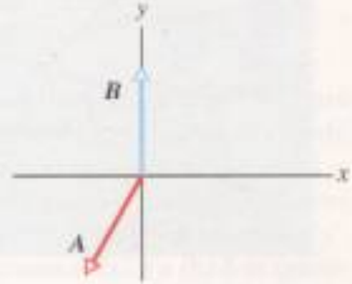


Figura 3.22 Quesito 6.

7. Quali delle combinazioni di assi della figura 3.23 può definirsi "sistema di coordinate destrorso"? Come si usa di solito la lettera che individua l'asse è messa dalla parte positiva di quest'ultimo.

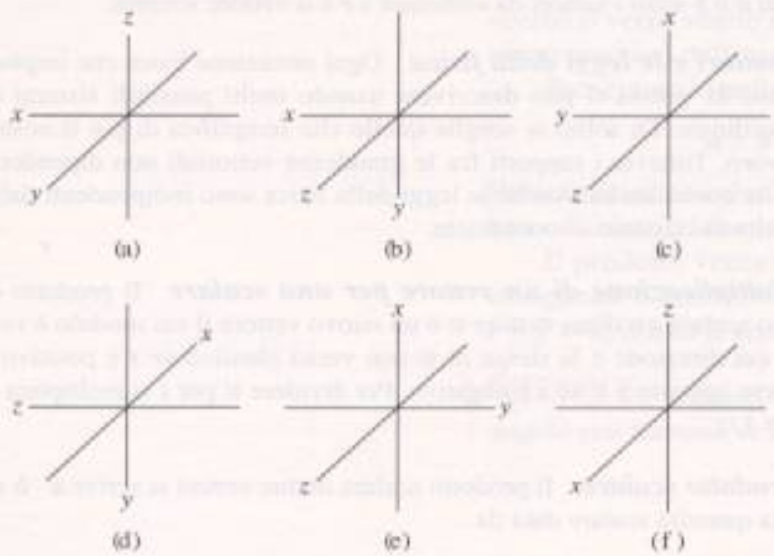


Figura 3.23 Quesito 7.

8. Se $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}$ possiamo dedurne che $\mathbf{b}=\mathbf{c}$?

9. Se $\mathbf{A}=2\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, quanto vale $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ove (a) $\mathbf{B}=8\mathbf{i}+16\mathbf{j}$ e (b) $\mathbf{B}=-8\mathbf{i}-16\mathbf{j}$? (Si può rispondere senza l'ausilio della calcolatrice.)

10. La figura 3.24 mostra il vettore $\mathbf{A}$ e altri quattro vettori di ugual modulo ma differente orientamento. (a) Quali di questi quattro danno lo stesso prodotto scalare con $\mathbf{A}$? (b) Quali danno un valore negativo se moltiplicati scalarmente per $\mathbf{A}$?

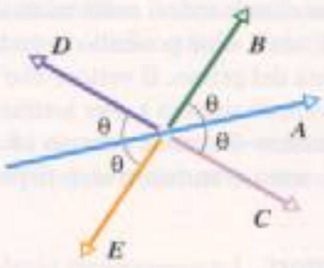


Figura 3.24 Quesito 10.

ESERCIZI & PROBLEMI

PARAGRAFO 3.2 Somma di vettori: metodo grafico

1E. Si considerino due spostamenti, uno di modulo 3 m e un altro di modulo 4 m. Si mostri in che modo si possono combinare i vettori spostamento per ottenere uno spostamento risultante di modulo (a) 7 m, (b) 1 m, e (c) 5 m.

2P. È stata compiuta una rapina in una banca nella città di Boston (vedi la mappa nella figura 3.25). Per eludere la polizia i ladri sono fuggiti in elicottero, percorrendo in volo tre tratte, descritte con i seguenti spostamenti: 32 km in direzione di 45° a sud rispetto a est; 53 km in direzione di 26° a nord rispetto a ovest; 26 km in direzione di 18° a est rispetto al sud. Alla fine del terzo volo furono catturati. In che città sono stati catturati? (Si usi il metodo geometrico per sommare questi spostamenti sulla carta).

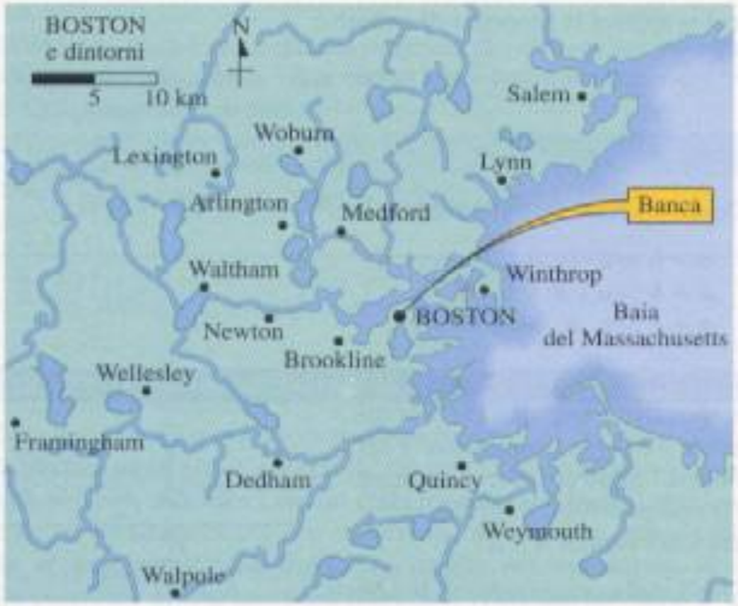


Figura 3.25 Problema 2.

PARAGRAFO 3.3 I vettori e le loro componenti

3E. Quali sono le componenti x e y di un vettore $\boldsymbol{a}$ nel piano xy se la su direzione è di 250° in senso antiorario rispetto al semiasse positiv delle x e se il suo modulo vale 7.3 unità?

4E. (a) Si esprimano i seguenti angoli in radianti: 20.0°, 50.0°, 100° (b) Si convertano in gradi i seguenti angoli: 0.330 rad, 2.10 rad, 7.70 rad.

5E. La componente x di un determinato vettore è −25.0 unità e la componente y è +40.0 unità. (a) Qual è il modulo del vettore? (b) Qual è l'angolo tra la direzione del vettore e il semiasse positivo delle x?

6E. Un vettore spostamento $\boldsymbol{r}$ sul piano xy è lungo 15 m e orientato com mostra la figura 3.26. Determinate le componenti x e y del vettore.

Figura 3.26 Esercizio 6.

7P. Una ruota con raggio 45.0 cm gira senza scivolare su un paviment orizzontale, come si vede nella figura 3.27. P è una tacca segnata su bordo della ruota. Nell'istante t_1 P è sul punto di contatto fra la ruota e il pavimento. In un secondo istante t_2 la ruota si è mossa di mezzo giro. Qual è (a) il modulo e (b) l'angolo rispetto al pavimento del vettore spostamento di P durante questo intervallo?

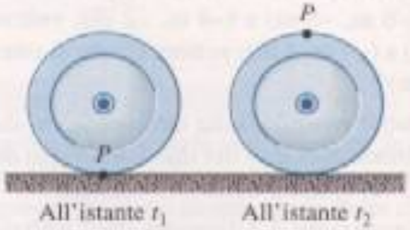


Figura 3.27 Problema 7.

8P. Le *faglie* sono spaccature della roccia, scivolando lungo le qual due pareti di roccia possono spostarsi una rispetto all'altra. Nella figura 3.28 i punti A e B in origine coincidevano, prima che la roccia anteriore slittasse in giù verso destra. Lo spostamento netto $\boldsymbol{AB}$ è avvenu-

Quesiti e Problemi/3 cap 3-5 ediz.

to lungo il piano di scorrimento. AC, componente orizzontale di $\boldsymbol{AB}$, è lo *scorrimento orizzontale*, mentre AD, componente di $\boldsymbol{AB}$ perpendicolare ad AC nel piano di scorrimento, è lo *scorrimento verso il basso*. (a) Qual è lo spostamento netto $\boldsymbol{AB}$ se lo scorrimento orizzontale è di 22.0 m e lo scorrimento verso il basso è di 17.0 m? (b) Se il piano di scorrimento è inclinato di 52.0° rispetto all'orizzontale, qual è la componente verticale di $\boldsymbol{AB}$?

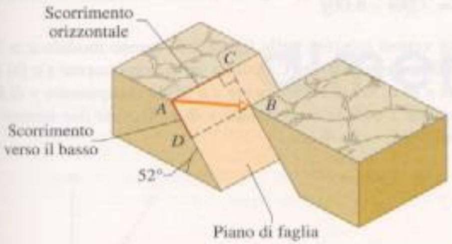


Figura 3.28 Problema 8.

9P. Le dimensioni di un grande locale sono, in metri, 3.00 (altezza), 3.70 e 4.30. Una mosca parte da un vertice della stanza e vola in giro, fermandosi infine nel vertice opposto, in diagonale, a quello da cui era partita. (a) Qual è il modulo del suo spostamento? (b) La lunghezza del tragitto percorso potrebbe essere minore di questa distanza? (c) È maggiore di questa distanza? (d) È uguale a questa distanza? (e) Scegliete un sistema di coordinate conveniente e trovate le componenti del vettore spostamento in questo sistema. (f) Se la mosca dovesse camminare sulle pareti invece che volare, quale è la lunghezza del più breve percorso possibile? (*Suggerimento*: si può rispondere senza effettuare calcoli; pensate alla stanza come a una scatola: si può aprire e stenderla su un piano.)

PARAGRAFO 3.5 Somma di vettori mediante le componenti

10E. Un'automobile viaggia verso est per 50 km, poi verso nord per altri 30 km, infine piega 30° a est rispetto al nord percorrendo ancora 25 km. Tracciate uno schizzo che illustri i vettori spostamento e determinate (a) il modulo e (b) la direzione dello spostamento complessivo dell'auto.

11E. (a) Qual è la somma, espressa mediante i vettori unitari, dei due vettori

$$\boldsymbol{a} = (4.0\ \text{m})\boldsymbol{i} + (3.0\ \text{m})\boldsymbol{j} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = (-13\ \text{m})\boldsymbol{i} + (7.0\ \text{m})\boldsymbol{j}?$$

Quali sono (b) il modulo e (c) la direzione (rispetto a $\boldsymbol{i}$) di $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$?

12E. Si trovino le componenti (a) x, (b) y e (c) z del vettore $\boldsymbol{r}$, somma dei vettori spostamento $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{d}$, le cui componenti in metri lungo le tre direzioni perpendicolari sono: $c_x = 7.4$, $c_y = -3.8$, $c_z = -6.1$; $d_x = 4.4$, $d_y = -2.0$, $d_z = 3.3$.

13E. Sono dati i due vettori

$$\boldsymbol{a} = (4.0\ \text{m})\boldsymbol{i} - (3.0\ \text{m})\boldsymbol{j} + (1.0\ \text{m})\boldsymbol{k}$$

e

$$\boldsymbol{b} = (-1.0\ \text{m})\boldsymbol{i} + (1.0\ \text{m})\boldsymbol{j} + (4.0\ \text{m})\boldsymbol{k}.$$

Si trovi nella notazione con i versori (a) $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, (b) $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, e (c) un vettore $\boldsymbol{c}$ tale che $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} = 0$.

14P. Siano dati i due vettori:

$$\boldsymbol{a} = (4.0\ \text{m})\boldsymbol{i} - (3.0\ \text{m})\boldsymbol{j} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{b} = (6.0\ \text{m})\boldsymbol{i} + (8.0\ \text{m})\boldsymbol{j}.$$

Quali sono (a) il modulo e (b) la direzione (rispetto a $\boldsymbol{i}$) di $\boldsymbol{a}$? Quali sono (c) il modulo e (d) la direzione di $\boldsymbol{b}$? Quali sono (e) il modulo e (f) la direzione di $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$? Quali sono (g) il modulo e (h) la direzione di $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$? Quali sono (i) il modulo e (j) la direzione di $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$? (k) Qual è l'angolo tra le direzioni di $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$?

15P. Due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ hanno modulo uguale pari a 10.0 unità. Sono orientati come si vede nella figura 3.29 e il loro vettore somma è $\boldsymbol{r}$. Si trovino (a) la componente x e (b) la componente y di $\boldsymbol{r}$, (c) il modulo di $\boldsymbol{r}$, e (d) l'angolo che $\boldsymbol{r}$ forma con l'asse x.

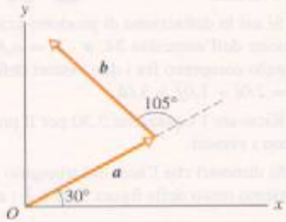


Figura 3.29 Problema 15.

16P. Nella somma $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ il vettore $\boldsymbol{A}$ ha modulo di 12.0 m e forma un angolo di 40.0° rispetto al semiasse positivo delle x; il vettore $\boldsymbol{B}$ ha invece modulo di 15.0 m ed è diretto con un angolo di 20.0° in senso antiorario rispetto al semiasse negativo delle x. Calcolare (a) il modulo e (b) la direzione (rispetto al semiasse positivo delle x) di $\boldsymbol{B}$.

17P. Si dimostri che due vettori devono avere modulo uguale se il loro vettore somma è perpendicolare al loro vettore differenza.

18P. Trovare il vettore somma dei seguenti 4 vettori (a) nella notazione con i versori, (b) esplicitandone il modulo e (c) l'angolo rispetto a $+x$:

- $\boldsymbol{P}$: 10.0 m, con angolo di 25.0° in senso antiorario da $+x$;
- $\boldsymbol{Q}$: 12.0 m, con angolo di 10.0° in senso antiorario da $+y$;
- $\boldsymbol{R}$: 8.00 m, con angolo di 20.0° in senso orario da $-y$;
- $\boldsymbol{S}$: 9.00 m, con angolo di 40.0° in senso antiorario da $-y$.

19P. Due vettori di lunghezza a e b hanno direzioni che formano un angolo θ compreso fra le loro direzioni quando sono collocati coda contro coda. Si dimostri, ricavando le componenti lungo due assi perpendicolari, che la lunghezza del loro vettore somma $\boldsymbol{r}$ è

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}\,.$$

20P. Trovare il vettore somma dei seguenti 4 vettori (a) nella notazione con i versori, (b) esplicitandone il modulo e (c) l'angolo rispetto a $+x$:

- $\boldsymbol{A}$: $(2.00\ \text{m})\boldsymbol{i} + (3.00\ \text{m})\boldsymbol{j}$;
- $\boldsymbol{B}$: 4.00 m, con angolo di 65.0° in senso antiorario da $+x$;
- $\boldsymbol{C}$: $(-4.00\ \text{m})\boldsymbol{i} - (6.00\ \text{m})\boldsymbol{j}$;
- $\boldsymbol{D}$: 5.00 m, con angolo di −235° in senso antiorario da $+x$.

21P. (a) Usando i vettori unitari, esprimete le diagonali (ossia i segmenti che congiungono un vertice all'altro passando attraverso il centro) di un cubo in funzione dei suoi lati, che sono di lunghezza a. (b) Determinate gli angoli formati dalle diagonali con i lati adiacenti. (c) Determinate la lunghezza delle diagonali.

PARAGRAFO 3.6 I vettori e le leggi della fisica

22E. Un vettore $\boldsymbol{a}$ con modulo di 12.0 m è orientato a 60.0° in senso antiorario rispetto al semiasse positivo delle x di un sistema di coordinate xy. Nello stesso sistema si ha un secondo vettore $\boldsymbol{b} = (12.0\ \text{m})\boldsymbol{i} + (8.00\ \text{m})\boldsymbol{j}$. Ruotiamo ora questo sistema in senso antiorario attorno all'origine di un angolo di 20.0°, ottenendo un nuovo sistema $x'y'$. Dare l'espressione mediante i versori dei vettori (a) $\boldsymbol{a}$ e (b) $\boldsymbol{b}$ in questo nuovo sistema di coordinate.

Quesiti e Problemi/4 cap 3-5 ediz.

PARAGRAFO 3.7 Prodotto di vettori

23E. Un vettore $\boldsymbol{a}$ di modulo 10 unità e un altro vettore $\boldsymbol{b}$ di modulo 6.0 unità giacciono in direzioni che divergono di 60°. Si trovino (a) il prodotto scalare dei due vettori e (b) il modulo del prodotto vettoriale $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

24E. Ricavare l'equazione 3.23 per il prodotto scalare nella notazione con i versori.

25P. Si usi la definizione di prodotto scalare $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = ab \cos\theta$, e la conclusione dell'esercizio 24, $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, per calcolare l'angolo compreso fra i due vettori definiti da $\boldsymbol{a} = 3.0\boldsymbol{i} + 3.0\boldsymbol{j} + 3.0\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{b} = 2.0\boldsymbol{i} + 1.0\boldsymbol{j} + 3.0\boldsymbol{k}$.

26P. Ricavare l'equazione 3.30 per il prodotto vettoriale nella notazione con i versori.

27P. Si dimostri che l'area del triangolo compreso tra i vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ e il segmento rosso della figura 3.30 è $\frac{1}{2}\,|\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\,|$.

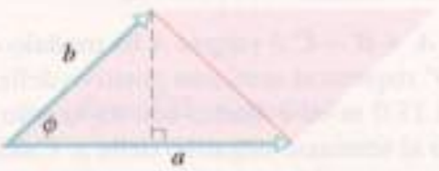


Figura 3.30 Problema 27.

28P. Nel prodotto $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ si ponga:

$$q = 2,$$
$$\boldsymbol{v} = 2.0\boldsymbol{i} + 4.0\boldsymbol{j} + 6.0\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{F} = 4.0\boldsymbol{i} - 20\boldsymbol{j} + 12\boldsymbol{k}.$$

Nel caso in cui $B_x = B_y$, si esprima $\boldsymbol{B}$ nella notazione con i versori.

29P. Si dimostri che $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$ è zero per qualsiasi coppia di vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. (b) Qual è il valore di $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$, se l'angolo ϕ compreso fra le direzioni di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ è diverso da zero?

30P. Dati i tre vettori seguenti, calcolare $3\boldsymbol{C} \cdot (2\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})$:

$$\boldsymbol{A} = 2.00\boldsymbol{i} + 3.00\boldsymbol{j} - 4.00\boldsymbol{k};$$
$$\boldsymbol{B} = -3.00\boldsymbol{i} + 4.00\boldsymbol{j} + 2.00\boldsymbol{k};$$
$$\boldsymbol{C} = 7.00\boldsymbol{i} - 8.00\boldsymbol{j}.$$

31P. I tre vettori mostrati nella figura 3.31 hanno modulo $a = 3.00$ m, $b = 4.00$ m e $c = 10.0$ m. Calcolate (a) la componente x e (b) la componente y di $\boldsymbol{a}$; (c) la componente x e (d) la componente y di $\boldsymbol{b}$; (e) la componente x e (f) la componente y di $\boldsymbol{c}$. Trovate due numeri (g) p e (h) q tali che $\boldsymbol{c} = p\boldsymbol{a} + q\boldsymbol{b}$.

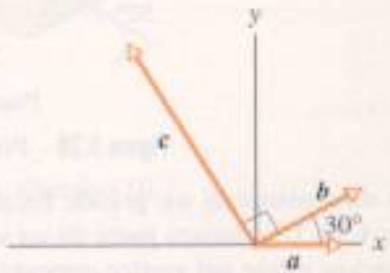


Figura 3.31 Problema 31.

32P. Due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ hanno come componenti, in metri, $a_x = 3.2$, $a_y = 1.6$, $b_x = 0.50$, $b_y = 4.5$. (a) Calcolate l'angolo compreso fra $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. Esistono due vettori nel piano xy perpendicolari ad $\boldsymbol{a}$ aventi entrambi modulo di 5.0 m. Uno, il vettore $\boldsymbol{c}$, ha la componente x positiva e l'altro, vettore $\boldsymbol{d}$, ha la componente x negativa. Quali sono (b) la componente x e (c) la componente y di $\boldsymbol{c}$? Quali sono (d) la componente x ed (e) la componente y di $\boldsymbol{d}$?